Pensamiento Educativo. Vol. 30 (julio 2002), pp. 75-97

HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE SABERES MATEMÁTICOS EN EL AULA. ENFOQUES DIDÁCTICOS DE INVESTIGACIÓN

LEONORA DÍAZ MORENO*

Resumen

Se presentan nociones centrales de la didáctica de la matemática, cuyo uso en la investigación con distintos acentos, está acercando las posibilidades de construcción de saberes matemáticos en el aula. Estas posibilidades devienen urgencias de cara a la magnitud de contenidos matemáticos que se tornan resistentes al entendimiento de nuestros estudiantes. Si bien tales construcciones constituyen un desafío que se juega al nivel de cada grupo de estudiantes, su profesora o profesor y un saber matemático escolar específico. Abordarlo demanda indagar e intervenir en cada vértice de este triángulo didáctico, así como en sus recíprocas interacciones, alertas a que tales construcciones son a la vez cotidianas e históricas y provienen de actores tanto individuales como colectivos.

Abstract

The purpose of this paper is to describe central concepts for the didactic of mathematics and the construction of mathematical knowledge in the classroom. The inclusion of these concepts in research practices allows teachers and students to develop mathematical knowledge in the classroom. The resistance of students to understand the complexity of mathematical knowledge is analyzed and a didactic triangle is proposed. This triangle includes a reciprocal interaction among the teacher, the student, and the mathematical knowledge.

---

* Doctora en Ciencias de la Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Académica del Programa de Magíster en Educación de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Introducción

Los desafíos que abordan profesores e investigadores en el campo de la enseñanza y los aprendizajes de matemática dicen relación con una labor formadora, que no sólo informe sino que persiga entendimientos significativos por parte de los ciudadanos, atendiendo a un desafío que aún resta pendiente en nuestra sociedad y que es la democratización de estos saberes. Empresa de largo aliento, que demanda la participación de comunidades de profesionales en didáctica de la matemática, que avancen colaborativamente en la constitución de sus teorías y recurran a metodologías propias y apropiadas, constituyendo así un cuerpo de conocimientos y prácticas que favorezca la construcción de saberes matemáticos en las aulas.

Con este trabajo se quiere colaborar a tal empresa de investigación y desarrollo, difundiendo aquellos saberes didáctico matemáticos que dan cuenta del estado de la situación en nuestro medio. Se presenta un conjunto –nuclear aunque no exhaustivo– de nociones de la didáctica de la matemática de raíces en la didáctica de origen francés, la didáctica fenomenológica y el enfoque socio epistemológico que permiten, en procesos de indagación teórico práctica y sobre la base de metodologías robustas, profundizar en la complejidad de la construcción de saberes matemáticos en el aula así como fundamentar diseños alternativos de enseñanza, tendientes a esa construcción. Se ilustra con resultados de investigación.

Nociones Fundamentales en Didáctica de la Matemática

El estudio de la preparación matemática de los estudiantes se sitúa en la didáctica de la matemática –de origen francés– en la articulación de dos campos teóricos que sin ser independientes son distintos: el de la teoría de las situaciones didácticas iniciado por Guy Brousseau a comienzos de la década de los 70 y al cual diferentes investigadores han contribuido desde entonces y el de la transposición didáctica desarrollado a comienzos de la década de los 80 por Yves Chevallard. Ambas miradas ponen sus raíces en la epistemología de la matemática.

Estos marcos teóricos dan forma y determinan en cierta medida el enfoque del estudio de la preparación matemática de los estudiantes. No obstante que estas teorías tienen objetivos diferentes, ambas se plantean el estudio de los fenómenos didácticos en un enfoque sistémico, aunque se refieren a niveles diferentes del análisis didáctico, uno local o microsistémico y el otro global o macrosistémico.

La teoría de las situaciones didácticas se sitúa en un nivel local: ella apunta a modelar las situaciones de enseñanza, de manera de permitir una elaboración y una gestión controlada. En un enfoque sistémico, la mirada se centra sobre sistemas didácticos, constituidos en torno de un profesor o profesora y de sus estudiantes. Sistemas de duración limitada, sumergidos en el sistema global de enseñanza, abiertos, vía este último, a la noosfera del sistema de enseñanza y, más allá, a la sociedad en la cual se inscribe el sistema de enseñanza. Fundada en un enfoque constructivista, parte del principio de que los conocimientos se construyen por adaptación a un medio que aparezca al menos problemático para los estudiantes.

Contrato Didáctico, Situaciones A-Didácticas y Didácticas son nociones nucleares. Para Brousseau el estudio y control de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar de conocimientos. En esta tarea de producción de conocimientos da forma a la noción del contrato didáctico y a la teoría de las situaciones. Por la noción de contrato didáctico entiende “un conjunto de reglas, frecuentemente implícitas, que pesan sobre los alumnos y el profesor y que condicionan su trabajo” (Brousseau, 1987, p. 5). Refiere a un conjunto de acuerdos tácitos que determinan implícitamente lo que tanto el alumno como el maestro deben manejar y de lo que es responsable uno frente al otro. Es el medio en el cual se pone en escena lo que este autor llama la situación didáctica.

Según el autor, el alumno sólo habrá adquirido verdaderamente el conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. A estas situaciones las llama adidácticas y será el maestro el responsable de determinar y presentar al alumno las que estén a su alcance. Por su parte, la situación didáctica es aquella más amplia en que el profesor se encuentra implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él le plantea, donde comunica, o se abstiene de comunicar, según sea el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje.

Por su parte, la teoría de la transposición didáctica apunta al análisis de los procesos que, a partir de los saberes de referencia y principalmente aquellos productos legitimados por la institución matemática "sabia", conducen a los objetos de enseñanza que viven cotidianamente en las clases. Y ella busca, más allá de tal o cual estudio particular, poner en evidencia ciertas leyes y regularidades en estos procesos transpositivos complejos. Yves Chevallard acuña la noción de Transposición Didáctica para referirse al proceso de transformación que experimenta un objeto del saber matemático establecido por la comunidad matemática con el propósito de constituirlo en objeto de enseñanza de matemática.

Este autor plantea una "reconceptualización" de lo didáctico sobre la base de un pequeño conjunto de nociones esenciales, a saber: objeto, sujeto, institución, y relación personal e institucional a un objeto (Chevallard, 1992). Con su nueva articulación conceptual amplía los marcos teóricos que toman a la matemática como sistema conceptual o como lenguaje, propugnando el estudio de la actividad matemática entendida como una actividad humana entre las demás. Para estudiar al hombre haciendo matemáticas se debe partir de lo antropológico para analizar la emergencia de lo matemático. Ningún registro de la actividad humana –matemático u otro– está limitado, ni definido de una vez por todas de manera autónoma e independiente del resto de las actividades sociales, esto es, la especificidad de lo matemático, y de lo didáctico dentro de lo matemático, no se puede hallar únicamente dentro de lo matemático. Así las personas, las instituciones y los objetos forman asociaciones complejas que este enfoque nomina ecosistemas o universos de objetos.

En este marco, la propuesta de sensibilidad a lo ostensivo en matemática de Bosh (1994) alerta a que el sujeto recibe sus "maneras de hacer" de la institución y que ésta funciona a través de sus sujetos. Bosh introduce la noción de "objeto ostensivo" como uno de los objetos de la actividad humana distinguiéndolo de los restantes a los que llama "objetos no - ostensivos". Caracteriza a los primeros por tener una valencia semiótica y una valencia instrumental, esto es, ser portadores de un significado a la vez que posibilitar el desarrollo de una tarea y que, por ende, en tanto instrumentos para la actividad matemática pueden condicionar tanto su desarrollo como su gestión. Por su parte, los niveles interdependientes de lo sintáctico, lo semántico y lo pragmático –afirma– "permiten afinar el análisis de la dialéctica entre lo ostensivo y lo no-ostensivo en la actividad matemática" (ob. cit. Bosh, p. 62). Por medio de la presentación y aplicación en su trabajo del "análisis ostensivo" establece la necesidad de relevar el fenómeno de la sensibilidad de las técnicas a lo ostensivo en la relación a lo matemático y más aún la sensibilidad de la cultura didáctica a la dimensión ostensiva de la actividad matemática.

En un enfoque de raíces cognitiva y antropológica, Duval complementa las miradas de indagación para la intervención de los fenómenos didáctico-matemáticos. En su aproximación teórica de los registros de representación semiótica, se propone un aprendizaje de la matemática específicamente centrado en la conversión de las representaciones semióticas a fin de articular y coordinar los diferentes registros de representación en los cuales es representado un determinado objeto matemático. El foco de su indagación es por el tipo de estructura cognitiva implicada en la actividad matemática.

Para Duval (1993) el análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos encontrados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta tres fenómenos estrechamente ligados, a saber, la diversificación de registros, la diferenciación entre representante y representado y la coordinación entre registros. En los estudios psicológicos sobre la adquisición del conocimiento o sobre sus transformaciones, distingue tres formas de presentar la noción de representación, estas son: mental, computacional y semiótica. Esta última se caracteriza por ser una representación de tipo consciente y externo y, como tal, cumple las funciones cognitivas de comunicación, objetivación y tratamiento. En consecuencia, el autor propone un aprendizaje de la matemática específicamente centrado en la conversión de las representaciones semióticas a fin de articular y coordinar los diferentes registros de representación en los cuales es representado un determinado objeto matemático. No es posible lograr esta articulación con una ejercitación de convertibilidad de casos típicos de representaciones, por una parte, debido a que están los casos de representaciones no-congruentes, y por otra, a que la conversión de las representaciones requiere de la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada. Para dicha articulación, entonces, se hace necesaria la discriminación de las unidades significantes propias a cada registro, problema que Duval considera “debe ser el objeto de un aprendizaje específico”, a fin de establecer las reglas de correspondencia semiótica entre cada registro.

Los registros de representación semiótica son aquellos sistemas semióticos que cumplen con las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación, es decir: constituir un conjunto de marcas identificables como una *representación de alguna cosa* en el sistema; transformar las representaciones de acuerdo con reglas propias de modo de constituir otra representación y así ganar conocimiento con respecto a la primera; y, convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema. Estas tres actividades corresponden a las actividades de *formación, tratamiento* y *conversión*. Un estudio de los aprendizajes fundamentales debe tener en cuenta: la diversificación de los registros; la diferenciación entre representante y representado; y la coordinación entre los registros.

Adicionalmente, la Teoría Sicológica de los Campos Conceptuales de Vergnaud, atiende a un principio de elaboración pragmática del conocimiento. Como teoría sicológica del proceso de conceptualizar lo real, apunta a localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual; a analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y a indagar en las invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situación, así como a explicitar las relaciones entre significados y significantes (Vergnaud, 1990).

Para teorizar sobre el aprendizaje de las matemáticas considera el sentido de situaciones y de símbolos, la acción del sujeto en situación y la organización de su conducta. La ilustran los ejemplos de los campos conceptuales de las estructuras aditivas y multiplicativas, la lógica de clases y el álgebra. Como teoría sicológica del proceso de conceptualizar lo real apunta a: (a) Localizar y estudiar las filiaciones y las rupturas entre conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual; (b) Analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y las invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situación; y (c) Explicitar las relaciones entre significados y significantes (Vergnaud, 1990).

Esquemas y Conceptos

Por esquema entiende una totalidad dinámica y funcional que organiza de modo ***invariante*** la conducta del sujeto. Comporta las reglas de acción y de anticipación, para una clase de situaciones dadas. Dice Vergnaud: “Con Piaget, uno puede decir que son los esquemas los que están al centro del proceso de adaptación de las estructuras cognitivas: asimilación y acomodación" (p. 138).

El autor usa la expresión de "invariantes operatorios" para designar las expresiones de "concepto-en-acto" y "teorema-en-acto" y que significan a aquellos conocimientos contenidos en los esquemas. Distingue para tales conocimientos tres tipos de invariantes operatorios lógicos: (a) Tipo proposiciones, susceptibles de ser verdaderos o falsos; los teoremas-en-acto son invariantes de ese tipo; (b) Tipo función proposicional, que constituyen los elementos indispensables en la construcción de proposiciones. Los conceptos-en-acto o las categorías-en-acto son funciones proposicionales. La relación entre funciones proposicionales y proposiciones es dialéctica: no hay proposiciones sin funciones proposicionales y recíprocamente. De la misma manera conceptos-en-acto y teoremas-en-acto se construyen en estrecha interacción; (c) Tipo argumento y que refieren al operar asignando valores. Estos al reemplazar a las variables en una función proposicional, la constituyen en una proposición. En matemática pueden ser objetos materiales, personajes, relaciones y las mismas proposiciones.

Aclara el autor: "Estas distinciones son indispensables para la didáctica porque la transformación de conceptos-instrumento en conceptos-objeto es un proceso decisivo en la conceptualización de lo real. Esta transformación significa entre otras cosas que las funciones proposicionales puedan devenir argumentos. La nominalización es una operación lingüística esencial en esta transformación" (ob. cit., p. 144). Y añade: "no se puede hablar de invariantes operatorios integrados en los esquemas sin la ayuda de categorías del conocimiento explícito: proposiciones, funciones proposicionales, objetos-argumento (...)". En suma señala: "Un acercamiento sicológico y didáctico a la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto recurre al conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y al conjunto de esquemas puestos en acción por los sujetos en esa situación” (ob. cit. p. 145).

Para el autor estudiar el desarrollo y funcionamiento de un concepto debe considerar su naturaleza de trío: C = C (S, I, F) donde S es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (el referente), I es el conjunto de invariantes sobre la que descansa la operacionalidad de los esquemas (el significado) y F refieren a las formas lingüísticas y no-lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos (el significante).

Campos Conceptuales

Refiere a un conjunto de situaciones así como al conjunto de conceptos y de teoremas que permiten analizar esas situaciones. Este enfoque de las situaciones hace posible generar una clasificación sobre la base de un análisis de tareas cognitivas y de procedimientos que se pueden poner en juego en cada una de ellas.

Situaciones

Se distancia del concepto elaborado por Guy Brousseau, asumiendo el sentido “que le da habitualmente la sicología: los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que ellos son confrontados” (ob. cit. p. 150). Enfatiza dos aspectos: (1) su variedad para un campo conceptual dado. Aquí señala que las variables de cada situación serán un medio de generar de manera sistemática el conjunto de clases posibles; (2) que la historia previa de situaciones, a las que se ha enfrentado el niño, le ha llevado a construir el conocimiento que sustenta.

Afirma el autor: “toda situación puede ser referida a una combinación de relaciones de base con conocimientos dados y otros desconocidos (...) La clasificación de estas relaciones de base y las clases de problemas que se puede generar a partir de ellas es un trabajo científico indispensable. Ninguna ciencia se ha constituido sin un trabajo de clasificación sistemática. Esta clasificación permite por su parte abrir el campo de posibilidades y superar el cuadro más limitado de las situaciones habituales de la vida" (ob. cit., p. 151).

La Didáctica Fenomenológica de las Matemáticas

Siempre en Europa continental (Holanda y Bélgica), toma cuerpo otro enfoque matemático didáctico apoyado en las reflexiones del matemático holandés Hans Freudenthal. En esta perspectiva se indaga en torno a los fenómenos más allá y más acá de objetos y procedimientos matemáticos. Freudenthal afirma que la explicación y la explicitación de la didáctica en la cual se ha apoyado la enseñanza tradicional, es la justificación de la enseñanza de una teoría: paradigma tradicional de enseñanza de las matemáticas. Idea clave para el autor es la oposición de dos concepciones de la enseñanza de la matemática: la que concibe a las matemáticas como un producto en oposición a esa otra que las concibe como una actividad. En esta última visión el acento está puesto sobre el proceso requerido para su aprendizaje.

El análisis de las matemáticas como una actividad presenta un sistema de "capas" en tanto que el análisis que ve las matemáticas como un producto terminado presenta más bien una estructura deductiva. En este último lo que interesa es la adquisición de conceptos. A juicio del autor, en el enfoque de adquisición de conceptos, la concretización de los conceptos es transitoria y olvidada por los estudiantes. El primer enfoque favorecerá una didáctica de la matemática como organización de fenómenos y constitución de objetos mentales: "En mi terminología, la fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o de una idea matemática, significa el hecho de describir ese ***noumenon*** (objeto mental) en relación con los ***phainomens*** que él permite organizar y a los cuales puede ser extendido; describir la manera como el objeto mental actúa sobre esos fenómenos en tanto instrumento organizador, y describir de que poder nos dota para manejar, manipular esos fenómenos" (Freudenthal, 1983). Así entonces, la didáctica fenomenológica propone una organización de fenómenos con el fin de enseñar a los estudiantes a manipular los significados de esa organización, resultando una matemática estrechamente ligada a la experiencia.

En particular, desde su trabajo de investigación en el Grupo de Enseñanza Matemática (G.E.M.) y en el marco de la didáctica fenomenológica, el matemático belga Nicolás Rouche acuña como consigna central: "aprender matemática es construir un saber en la cantera de los problemas". A su juicio, la construcción del saber se hace en forma progresiva. Partiendo desde contextos y nociones cotidianas, los conceptos iniciales vuelven a aparecer en nuevos contextos y situaciones. Este proceso permite que las primeras nociones vayan evolucionando y progresando en su construcción. El conocimiento no se presenta como definitivo; cada vez que reaparece presenta nuevas facetas, se enriquece, complejizándose.

En este enfoque: (a) El maestro propone una sucesión de problemas que va a alguna parte; (b) El estudiante aprende conceptos matemáticos franqueando "umbrales epistemológicos", evolucionando de modo dialéctico desde contextos familiares con nociones cotidianas a temas matemáticos (constituidos de axiomas y teorías); y (c) La teoría emerge con un carácter instrumental: cada etapa de este proceso de aprendizaje en espiral, provee elementos teóricos a la vez que usa de los ya construidos en una etapa anterior. En suma para este enfoque, superar el umbral epistemológico mediante la resolución de problemas es hacer matemáticas en forma profunda, ya que, más que la adquisición teórica, aporta una experiencia que es utilizable en actividades matemáticas posteriores y transferible a otros campos.

El enfoque socioepistemológico

El doble proceso de desarrollo que se nutre, por una parte, de la reflexión matemática al seno de lo didáctico y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción –social e individual– del conocimiento, ha sido una de las principales y más recientes contribuciones de la Matemática Educativa a la didáctica matemática (Cantoral y Farfán, 1998). Esta línea de investigación de origen latinoamericano, toma como objeto de estudio a la socioepistemología de los saberes matemáticos e incluye las epistemologías de los estudiantes y docentes, con el fin de rediseñar el discurso matemático escolar.

Esta disciplina estudia los procesos de constitución, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. No se reduce a la búsqueda de una "buena manera" de enseñar una cierta noción fijada previamente, sino que asume como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber aunque este objetivo no sea alcanzado. La investigación se propone afectar positivamente al sistema didáctico; mejorar los métodos y contenidos de enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de tales sistemas. En suma, busca tener una mayor gestión de las regularidades del funcionamiento de las situaciones de enseñanza, de modo que no sólo trata con la matemática como un tema escolar, sino también quiere entender cómo y por qué se aprende, y cómo y por qué se estructura el conocimiento con fines didácticos.

Este enfoque didáctico socioepistemológico concibe a la matemática como actividad humana, como un producto cultural; construcción humana no está exenta de ires y venires, de nociones que se incorporan paulatinamente a una estructura formal, luego de pasar por etapas de formulación y consenso, resultado de inquietudes socioculturales, en marcos de paradigmas determinados. Se mira a las personas y la sociedad haciendo matemáticas, construyéndolas, difundiéndolas y aprendiéndolas. La problemática que estudia surge en el ámbito de la matemática escolar, aquella que se significa y resignifica en las aulas de los distintos niveles educativos. Explora "dislexias" intrínsecas a la enseñanza, a los aprendizajes, así como a las nociones y procedimientos matemáticos en su deriva histórica, desde el marco de su gestión de aula. Especial atención pone en rastrear las nociones fundantes del discurso matemático, incluso antes de que éstas sean formalmente definidas –su prehistoria cultural– con el propósito de identificar hitos en su desarrollo, momentos relevantes, significados y sentidos que pudieran haberse diluido y que pudieran proporcionar bases o elementos para un posterior diseño de una situación didáctica.

Obstáculos: Noción transversal en el desarrollo de la Didáctica de la Matemática

Los maestros observan en las producciones de sus estudiantes –en lugar de contenidos que se resisten a sus entendimientos– otras ideas o contenidos, a los que rotulan de erróneos. Este hecho sostuvo por un buen tiempo programas de investigación didáctica que se abocaron al estudio de las "mixconceptions", preconcepciones o ideas previas de los estudiantes, en el marco del paradigma del cambio conceptual en la didáctica de la ciencia, el que se abandona progresivamente en tanto se va produciendo un enriquecimiento persistente de marcos teórico didácticos. Desde años previos a 1980 y posteriores a 1990, la noción de obstáculo se instala en la reflexión didáctica para colaborar en la búsqueda de respuestas al por qué de contenidos resistentes al entendimiento de los estudiantes.

Establece la noción de obstáculo epistemológico el filósofo y epistemólogo Gastón Bachelard (1938) en su texto "La formación del espíritu científico". Allí puntualiza: "es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos las causas de estancamiento y hasta de retroceso; es allí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (...) El pensamiento empírico es claro, *inmediato*, cuando ha sido bien montado el aparejo de las razones. Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un verdadero arrepentimiento intelectual. En efecto, se conoce *en contra* de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización" (p. 15).

Por su parte, la incorporación de la noción de obstáculo en la didáctica de las matemáticas se inicia con la presentación de G. Brousseau en la conferencia de la CIAEM (1976), en Louvain la Nueve. El autor discute y examina nuevamente la noción de Obstáculo Epistemológico, contribuyendo al debate sobre las relaciones entre la didáctica y la epistemología de la matemática, en su artículo de 1983, "Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas". Precisa que: "Los trabajos conformes a las concepciones de Bachelard (...) muestran también que el error y el fracaso no tienen el rol simplificado que en ocasiones uno quiere hacerles jugar. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles; están constituidos de obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido" (apartado 1.3.5).

Brousseau pone en evidencia ciertos caracteres específicos de esta noción, sobre todo el hecho de que un obstáculo epistemológico es constitutivo del conocimiento elaborado. Así, tanto la identificación como la caracterización de un obstáculo son esenciales en el análisis y en la construcción de situaciones didácticas. Según Brousseau los obstáculos relevados en didáctica de matemática poseen: (a) un origen ontogenético corresponde a aquellos ligados a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los alumnos involucrados en una enseñanza; (b) un origen didáctico para los ligados a las elecciones del sistema de enseñanza; y (c) un origen epistemológico para los obstáculos ligados a la resistencia de un saber mal adaptado, es decir, los obstáculos en el sentido original que le daba Bachelard. (apartado 2.3).

Sierpinska (1985) retendrá dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico de G. Bachelard, su carácter inevitable –son necesarios para continuar con el desarrollo del conocimiento– y el que su aparición se repite tanto en la filogénesis como en la ontogénesis de los conceptos. Y, para Artigue (1990), lo que fundaría de alguna manera los obstáculos epistemológicos en didáctica de la matemática es, por una parte, su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos en cuestión y, por otra parte, la observación de concepciones análogas en los alumnos. Estos no se constituyen con solo certificar la resistencia de esas concepciones en los alumnos actuales. Los nudos de resistencia severa en los estudiantes hoy corresponden a menudo a los puntos en los que un obstáculo de origen epistemológico histórico interviene, reforzado por un obstáculo de origen didáctico. Díaz (1999) añadirá los obstáculos socioculturales, a los cognitivos, didácticos y epistemológicos señalados hasta aquí, para explicar resistencias al entendimiento de conceptos matemáticos.

Posteriormente Gascón (1994) sostendrá que su noción de obstáculo así como su develación permite por una parte comprender un determinado conocimiento matemático y por otra explicar mejor los fenómenos didácticos relacionados. Señala que “un obstáculo epistemológico consiste precisamente en ser origen de una *bifurcación* en el desarrollo de las matemáticas y que es este desarrollo múltiple (bifurcado) el que puede ser explicitado (...) un obstáculo epistemológico es constitutivo del conocimiento matemático que genera; (...) la explicitación de un obstáculo en términos de la bifurcación que origina permite comprender la naturaleza de dicho conocimiento" (ob. cit., p. 305). Comprender una presunta calidad de obstáculo del conocimiento T requiere la posibilidad de explicar la bifurcación del desarrollo de las matemáticas en la que T esté involucrado. Debe responderse por ejemplo: ¿Cuál fue la actividad matemática en la que se produjo la génesis de T? ¿Qué campos de problemas se estudiaban? ¿Qué discursos teóricos (más o menos explícitos) servían para justificar las técnicas e interpretar los problemas? ¿Cómo se bifurcó dicha actividad matemática?

Observamos cómo las reflexiones sobre la noción de obstáculo colaboran a constituir a la epistemología de las matemáticas, como uno de los campos ineludibles a la indagación didáctica. Otros campos son lo propiamente didáctico, lo cognitivo, lo sociológico y lo cultural-antropológico, los que se contemplan en niveles de lo macro y lo micro sistémico.

Una metodología de investigación-acción en Didáctica de la Matemática: La Ingeniería Didáctica

El término de Ingeniería Didáctica (ID) surge en el seno de la escuela francesa, a inicios de la década de los ochenta, analogando al quehacer en ingeniería, en tanto que éste no sólo se realiza apoyándose en resultados científicos sino que involucra también una toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes inherentes al proceso. En términos de Artigue (1995): "En los años ochenta esta visión se percibe como el medio de abordar dos cuestiones cruciales, dado el estado de desarrollo de la didáctica de las matemáticas en la época: las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza y el papel que conviene hacerle tomar a las 'realizaciones didácticas' en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica" (p. 34). "Ella [I.D.] llega a significar tanto unas producciones para la enseñanza, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como una metodología de investigación específica." (p. 36). En tanto, producciones para la enseñanza se constituye en una forma de trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero, quien, apoyándose en sus conocimientos científicos de su dominio y aceptando el control de la teoría, se encuentra obligado a trabajar con objetos más complejos que los objetos puros de la ciencia y gestionar, entonces, problemas de los cuales la ciencia –investigación didáctica matemática– no quiere o no puede hacerse cargo.

Sus propulsores distinguen cuatro fases temporales en la metodología de la ID, a saber, (i) análisis preliminar; (ii) concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería; (iii) experimentación; y (iv) análisis a posteriori y evaluación. Destaca Artigue dos trabajos de investigación en esta perspectiva como "clásicos incuestionables" dada la amplitud de las realizaciones didácticas involucradas y la importancia de su aporte teórico: las tesis de G. Brousseau del año 1986 y de R. Douady del año 1984.

En este punto del trabajo, cabe hacer referencia a la naturaleza que van tomando el triángulo didáctico, cada uno de sus actores, la interrelación de éstos, así como sus articulaciones con otros niveles o facetas del fenómeno educativo, en un marco de creciente confluencia de las miradas indagativas de las ciencias humanas. Transitamos hacia superar algunas oposiciones, herencia de distinciones clásicas de la filosofía y cuyas resonancias en la sociología se expresan en los dipolos: "colectivo-individual", "macro-micro", "objetivo-subjetivo", "acción-estructura". Lo que antes se separaba, ahora se interrelaciona. La realidad social se considera como constituyendo una totalidad de sentido, una estructura de significaciones sociales, que se manifiesta en sus situaciones particulares, cristalización de múltiples determinaciones sociales, institucionales y personales. De este modo un episodio encierra una trama de relaciones en la cual dicho episodio se encuentra inserto, y que explican su particular ocurrencia. Emergen como objetos válidos de investigar para la didáctica de la matemática, entre otros, las epistemologías de los sujetos y de sus prácticas educativas. Ello es coherente con una concepción de realidad social donde los sujetos, por el hecho de formar parte de una trama compleja de interacciones, se encuentran involucrados en una estructura dinámica de significados sociales. La búsqueda de comprensión de lo singular nos va permitiendo descubrir los elementos estructurales comprendidos en una realidad particular: expresión de la relación dialéctica de la acción y la estructura.

Investigaciones que reflejan tales confluencias han develado facetas del aula matemática, tales como las que se ilustran a continuación: propósitos implícitos y divergentes de los actores del aula; producciones escolares que esconden obstáculos de origen didáctico; resonancias cotidianas en voces matemáticas que constituyen obstáculos socioculturales a los entendimientos; hitos del desarrollo de una noción matemática cuyos significados y sentidos han desaparecido del aula y que pudieran proporcionar bases para rediseños didácticos.

Algunas ilustraciones a modo de resultados

Propósitos implícitos divergentes en estudiantes y profesores. En el marco de la investigación doctoral sobre las concepciones del objeto matemático de límite, Díaz (1999) devela cómo los estudiantes despliegan un esfuerzo con objetivos propios, a saber, la aprobación de la asignatura de Cálculo del primer semestre de su plan de estudio de un programa de Ingeniería. Respecto a los propósitos implícitos con que los profesores abordan la enseñanza del cálculo inicial, el estudio de casos muestra cómo los objetivos de los docentes son diferentes aunque refieren a una misma cátedra y ninguno apunta explícitamente al logro de aprendizajes del objeto matemático del currículum explícito y foco de la investigación. En tanto uno se propuso enseñar para que los alumnos aprueben, el otro procuraba enseñar buen cálculo. Emerge entonces otra fuente explicativa para aprendizajes no logrados respecto de la noción de límite del currículum explícito: ni docentes ni estudiantes se lo han propuesto para el currículum vivido.

Producciones escolares que esconden obstáculos didácticos. En el caso de los entendimientos de los exponentes no naturales, las representaciones de los estudiantes muestran epístemes construidas en la misma dinámica escolar, esto es, sus visiones de los exponentes responden a prácticas escolares anteriores que se constituyen en verdaderos núcleos duros de sus representaciones de la potenciación. En efecto (Martínez, 2001), algunas respuestas de los estudiantes al evaluar la expresión 2x son las siguientes:

> $2^0 = 0$ *ya que el dos no se multiplica*
>
> $2^1 = 4$ *ya que multiplicamos una vez el dos (2*2)*
>
> $2^1 = 2$ *ya que se pone una vez el número*
>
> $2^{-3} = -8$ *ya que 2*2*2=8 y sólo se le cambia el signo*
>
> $2^{-3} = -8$ *ya que (–2)*(–2)*(–2)= –8*

Los saberes de los estudiantes refieren al modelo de multiplicación reiterada para exponentes naturales, alternativa enseñada mayoritariamente en las aulas, modelo que marca el inicio de la enseñanza de la noción de exponente. Las restricciones de la transposición didáctica que pesan sobre los textos de saber lo hacen apto para su introducción: es un modelo que involucra operaciones simples (multiplicaciones) que los estudiantes han trabajado desde hace mucho e involucra una noción tan transparente como es la de contar.

Resonancias cotidianas en la voz matemática de límite que encierra obstáculos de origen sociocultural. En Díaz (1999, ob. cit.) la microsubjetividad de los estudiantes añadió a la didáctica matemática la fuente de los obstáculos socioculturales para explicar resistencias a la construcción de saber matemático en el aula. El análisis de la estructura de la noción del límite del habla cotidiana arrojó tres acepciones, a saber, la de *separador cerrado***,** que se refiere a la constitución de mundos o realidades excluyentes y se relaciona con la familia de acepciones cotidianas de término, fin y lindes. La de *separador abierto* que refiere a la familia de acepciones linde entre y lindero entre, acepción esta que distingue entre medios diversos. Y la de *valor en un contexto direccionado***,** que distingue según gradaciones crecientes o decrecientes y está más relacionada con excepcional, culmine, cambio, quiebre o transgresión –pasar y sobrepasar.

Se derivaron consecuencias para los aprendizajes del concepto de límite, desde cada uno de los tipos de acepciones con sus contenidos y valoraciones. Las calificaciones para "separador cerrado" y "valor en un contexto direccionado", son acepciones vinculadas a fuerzas socializadoras que se relacionan con la existencia misma del sujeto. "Fuera" significa transgresiones entre cuyas consecuencias se encuentran la inseguridad por la marginación, pasando por un quiebre irreversible en el límite mismo. Entonces el sujeto velará por mantenerse dentro de los márgenes de modo consciente como inconsciente. Ello será una fuerza sustantiva para evitar el límite y, más aún, "tocarlo". Se le asigna un valor de "extremo-peligro" y de máximos alcanzables "justo antes" del cambio irreversible. Si el joven ancla el concepto matemático en estas ideaciones, tendrá dificultades para concebir las características matemáticas del mismo, varias de ellas a contrapelo de estas connotaciones cotidianas.

Hitos en el desarrollo de la noción matemática de logaritmo. En su indagación epistemológica Ferraris (2001) concluye que se pueden distinguir tres etapas en el desarrollo de los logaritmos, si se toma como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, argumento utilizado por Napier para su primera definición (siglo XVII). En un primer momento aparecen los *logaritmos como transformación*, extensión de las progresiones y en la búsqueda de facilitar engorrosos cálculos producto de las necesidades sociales de la navegación, artillería y astronomía. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico, comenzando con ideas intuitivas de *transformar* para facilitar operaciones intentado regresar a la aritmética, es decir, utilizar sólo sumas y restas. Es desde la confluencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de la relación entre ambas que surge la definición de los logaritmos.

En un segundo momento, el de *los logaritmos como modelizadores,* se determinan sus características geométricas y por tanto logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo registro "algebraico-geométrico" que se estaba desarrollando; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia encontrando otro lenguaje para ser descritos ingresando así en los avatares de un cálculo en plena gestación; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos a partir de su desarrollo en serie de potencias, lo cual les abre las puertas para acceder al discurso matemático del siglo XVIII y adquirir el status de función.

Un tercer momento, la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos,* conceptos trabajados en la enseñanza actual, los escinde de las argumentaciones dadas anteriormente. Así, en este devenir, identifica Ferraris a las nociones de progresión geométrica y aritmética, como hilo conductor de los tres estadios del logaritmo. Estas progresiones pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades, apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento. Proporcionan elementos para introducir y desarrollar el logaritmo en el aula, de forma más accesible para los alumnos y profesores, los cuales se encuentran por lo general ante una noción con la que pueden operar, trabajar algorítmicamente, a la que luego someten a derivación, integración, entre otras operaciones matemáticas, sin haberla construido en su vida escolar.

Consideraciones finales

Las nociones presentadas pertenecen a distintos momentos de desarrollo y modelan diferentes aspectos según se trate de un foco teórico predominantemente didáctico, cognitivo, sociocognitivo, epistemológico, socioepistemológico o cultural antropológico, y sus miradas sistémicas corresponden a determinado nivel de interacción macro-micro. Así por ejemplo modelan procesos del pensamiento, aspectos del conocimiento o de las concepciones de los alumnos, los errores que ellos cometen o localizan y estudian los obstáculos asociados a la construcción incluyendo a las estructuras mentales, asumiendo la existencia de objetos matemáticos con prescindencia de su uso, de sus procesos históricos de significación y de resignificación progresiva. Otros enfoques se hacen cargo de ello e identifican actividades necesarias para construir al objeto. Tanto desde el punto de vista del alumno individual como del alumno al seno de grupo de trabajo y de su relación con el maestro.

No obstante este amplio abanico de acercamientos a la investigación en didáctica de la matemática ahora presentados, restan otros más allá y más acá del aula, tales como la etnomatemática y aquella indagación educativa de raíz anglosajona más allá y más acá de saberes matemáticos escolares específicos. Invitación abierta al desarrollo de este campo, privilegiando síntesis propias y apropiadas a nuestros requerimientos.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). “Ingeniería Didáctica en Educación Matemática”. pp. 33-59. P. Gómez (ed.), *Una Empresa Docente-Grupo*, Editorial Iberoamérica, Bogotá, Colombia.

Artigue, M. (1990). “Epistemología y Didáctica”, *Recherches en Didactique des Mathématique*s, Vol. 10, Nº 2-3.

Bachelard, G. (1983). *La formación del espíritu científico*, Siglo XXI Editores, S. A., México.

Bosh, M. (oct., 1994). "La Dimensión Ostensiva en la Actividad Matemática. El Caso de la Proporcionalidad". Memoria doctoral. Departamente de Matemàtiques, Fac. de Ciencies, U. Autónoma de Barcelona.

Brousseau, G. (1987). "Fundamentos de Didáctica de la Matemática". Texto base en los créditos de 3er. ciclo impartidos por el profesor Brousseau, Programa de Doctorado de la Universidad de Zaragoza. Traducción de las profesoras Centeno J. y Melendo, B. y el profesor Murillo, J.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis". *Revista Epsilon*, Núm. 42. España.

Chevallard, Y. (1992). "Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives Apportées par une Approche Anthropologique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, Nº 1.

Díaz, L. (1999). "Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite. Un estudio de casos". Memoria doctoral. Facultad de Educación. PUCCH. 1999. Santiago de Chile.

Duval, R. (1993). "Registres de representación sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée". *Annales de Sciences Cognitives et Didactique* 5, IREM de Strasbourg.

Ferraris, M. (2001). "Una visión socio-epistemológica. Estudio de la función logaritmo". Tesis de maestría. Cinvestav. IPN. México.

Gascón, J. (1994). "Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 13, Nº 3.

Martínez, G. (2000). "Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales". Tesis de maestría. Cinvestav. IPN. México.

Sierpinska, A. (1985). "Obstacles Epistemologiques Relatifs à la Notion de Limite", *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, Vol. 6.1.

Vergnaud, G. (1990). "La Théorie des Champs Conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, Nº 23.