

Creencias y conocimiento matemático escolar al comienzo de la formación inicial docente en estudiantes de Pedagogía General Básica

Beliefs and Mathematical School Knowledge at the Beginning of Pre-service Primary Teacher Education

María Victoria Martínez Videla^{1,2}, Francisco Rojas Sateler³,
Rodrigo Ulloa⁴, Eugenio Chandía⁵, Andrés Ortíz⁴
y Josefa Perdomo Díaz⁶

¹ Universidad de Chile, Chile

² Universidad de O'Higgins, Chile

³ Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

⁴ Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

⁵ Universidad de Concepción, Chile

⁶ Universidad de la Laguna, España

Resumen

El Sistema de Desarrollo Profesional Docente existente en Chile desde 2016, obliga a las universidades con programas de formación de profesores a realizar un diagnóstico en el primer año de la carrera. En este contexto, el estudio describe las creencias que tienen los futuros profesores de educación primaria respecto de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, así como el conocimiento matemático escolar correspondiente a los niveles de 1º a 6º año básico (6 a 12 años), considerando que es la materia que deberán enseñar en su vida profesional. Este diagnóstico se realizó mediante la aplicación de un cuestionario de lápiz y papel, a una muestra aleatoria estratificada de 511 estudiantes de primer año de educación primaria de 14 universidades chilenas. A partir de esto, desarrollamos una caracterización de los estudiantes en términos de sus creencias y conocimiento de matemática escolar, indagándose en las relaciones entre estos dos aspectos. Los resultados muestran que los estudiantes consideran la actividad matemática de forma diversa, y que evidencian un dominio mayor de los contenidos de aritmética por sobre los otros conocimientos matemáticos..

Palabras clave: conocimiento matemático, creencias, educación matemática, formación inicial docente.

Correspondencia a:

María Victoria Martínez Videla
Avenida Libertador Bernardo O'Higgins 611, Rancagua, Chile.
mariavictoria.martinez@uoh.cl

Este trabajo es producto del desarrollo del proyecto Fonide FX 11624 titulado "Diagnóstico de las creencias y conocimientos iniciales de estudiantes de Pedagogía Básica sobre la matemática escolar, su aprendizaje y su enseñanza", el cual fue desarrollado de manera conjunta por quienes figuran como autores del artículo. También se agradece el financiamiento otorgado por el Fondo Basal para centros de Excelencia proyecto FB003 de PIA-CONICYT.

© 2019 PEL, <http://www.pensamientoeducativo.org> - <http://www.pel.cl>

ISSN:0719-0409 DDI:203.262, Santiago, Chile doi: 10.7764/PEL.56.2.2019.9

Abstract

The Teacher Professional Development System, existing in Chile since 2016, requires universities with teacher training programs to make a diagnosis in the first year of the degree. In this context, we present a study that allowed us to describe the beliefs regarding mathematics, its teaching and learning, as well as the mathematical school knowledge corresponding to the levels from 1 to 6, which have the future primary education teachers, considering that it is the mathematics that they should teach in their professional life. This diagnosis was made by applying a pencil and paper questionnaire to a stratified random sample of 511 first-year primary school students from 14 universities in Chile. From this, we develop a characterisation of students regarding their beliefs and knowledge of school mathematics, investigating the relationships between them. The results show that students consider mathematical activity differently, and have greater mastery of arithmetic content.

Keywords: beliefs, mathematics education, mathematical knowledge, pre-service teacher education.

Presentación

En la última década, Chile ha desarrollado diversos programas de fortalecimiento de la formación inicial docente (FID), así como estrategias de apoyo a la inserción profesional. En la actualidad, el Sistema de Desarrollo Profesional Docente, creado bajo la Ley 20.903, propone entre otras iniciativas una prueba obligatoria formativa al inicio de la carrera profesional, con incidencia en la acreditación de las carreras de Pedagogía que ofrecen las universidades del país, aunque sin consecuencias directas para el profesor en formación. En este contexto, todas las universidades chilenas con programas de formación acreditados requerirán diagnosticar a los estudiantes de primer año, con tal de realizar ajustes a sus programas y diseñar trayectorias que permitan alcanzar las metas descritas en los respectivos perfiles de egreso.

Frente a esta situación surgen naturalmente preguntas tales como: ¿Qué características del estudiantado sería necesario conocer al inicio de su formación como docente? ¿En cuáles de ellas sería importante realizar un seguimiento? ¿Qué tipo de instrumentos podrían ser útiles para realizar estos diagnósticos? Las respuestas a estas preguntas deberían estar alineadas con el diseño del programa de formación docente que se ofrezca, ya que existe evidencia de los distintos énfasis en cada uno de ellos. En particular, la literatura muestra cómo sistemas educativos exitosos entregan una formación centrada en los conocimientos disciplinarios y en las didácticas, otorgando gran importancia a las prácticas (Mourshed, Chijioke & Barber, 2010; Musset, 2010), y enfocando los esfuerzos en la efectividad de los profesores en sus primeros años de ejercicio profesional a la hora de lograr aprendizajes (Boyd, Grossman, Lankford, Loeb & Wyckoff, 2009; Ortúzar, Flores, Milesi y Cox, 2009).

Por otra parte, numerosas investigaciones señalan la necesidad de complementar lo anterior tomando en cuenta elementos del dominio afectivo, lo que incluye el sistema de creencias de un individuo (Hannula, 2012; Philipp, 2007; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008; Thompson, 1992). La presente investigación se basó en el planteamiento de que las creencias se ven altamente influenciadas por las percepciones, las características personales, las experiencias y las decisiones en la trayectoria de vida de una persona. A su vez, y de forma cíclica, estas afectarían las decisiones y acciones del individuo, y cómo este percibe e interpreta sus experiencias (Bandura, 1986; Nisbett & Ross, 1980; Pajares, 1992). En particular, las creencias juegan un rol importante en el quehacer de los profesores, dado el efecto que tienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje al conformar un sistema que actúa como filtro,

estructurando el conocimiento, las percepciones y las decisiones del docente en el desarrollo de sus clases de matemática (Freeman, 1989; Pajares, 1992; Richardson, 1996; Schmeisser, Krauss, Bruckmaier, Ufer & Blum, 2013; Voss, Kleickmann, Kunter & Hachfeld, 2013).

A partir de lo anterior, identificamos dos aspectos importantes a considerar en el proceso de diagnóstico y seguimiento de los estudiantes de cualquier programa FID: los conocimientos disciplinares que enseñarán, y sus creencias acerca de la propia disciplina y de su enseñanza-aprendizaje. Por tanto, en este trabajo buscamos responder la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué creencias y conocimientos sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza tienen los estudiantes de Pedagogía Básica al iniciar su proceso de formación profesional? Para dar respuesta a esta interrogante, la presente investigación consideró la aplicación de un instrumento enfocado en diagnosticar los conocimientos matemáticos escolares (los que se imparten entre 1° y 6° año básico) y las creencias acerca de la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza en estudiantes de Pedagogía Básica al iniciar su formación profesional. Este proceso nos permite presentar una caracterización de ambos elementos y explorar, de manera inicial, algunas relaciones entre ellos.

Marco conceptual

Existen diferentes modelos que se han hecho cargo de establecer los dominios de conocimiento y práctica que un individuo debería desarrollar para convertirse en profesor de matemática y generar aprendizajes en sus estudiantes (Font, Breda, Giacomone y Godino, 2018). Por ejemplo, los estudios empíricos permitieron a Ball, Thames & Phelps (2008) definir el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, Mathematics Knowledge for Teaching en inglés), el cual recoge y organiza las dimensiones planteadas por Shulman (1987), destacando la necesidad de un conocimiento especializado de la disciplina para su enseñanza. Ma (2010) sugiere que un profesor de matemática requiere de un conocimiento profundo de la matemática escolar, basado en un adecuado dominio de conexiones matemáticas. Por su parte, Carrillo, Contreras y Flores (2013) incorporan al modelo MKT el sistema de creencias de un individuo, ya que este influencia tanto su conocimiento como sus prácticas. A continuación, presentaremos antecedentes respecto de qué consideramos como Conocimiento Matemático Escolar (CME) y así como las creencias de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, entendiendo estas dos dimensiones como ejes que estructuran nuestro trabajo.

Conocimiento matemático escolar

El marco curricular escolar establece lo que una sociedad espera lograr en el futuro con sus nuevas generaciones, por lo que se compone de partes que son dinámicas, y que responden al desarrollo deseado (Cox, 2011; Kerr, 2002). En este sentido, las habilidades y conocimientos en el currículo escolar aluden a una exigencia secular de mayores capacidades en los ciudadanos, siendo algunas de estas la capacidad de abstracción, pensar sistemáticamente, experimentar, aprender a aprender, comunicar y trabajar colaborativamente, resolver problemas, manejar la incertidumbre y adaptarse al cambio (Cox, 2011; Kerr, 2002; Ministerio de Educación de Chile, Mineduc, 2009). Por esta razón, en los últimos 10 años varios países han modificado sus currículos, buscando mejorar la calidad de sus sistemas educativos en relación con el desarrollo de sus sociedades y del mundo (Hemmi, Lepik & Viholainen, 2013). Chile no fue la excepción, ajustando el currículo escolar en matemática en cuatro ocasiones durante los últimos 25 años (en 1996, 2002, 2009 y 2012). En estas modificaciones, las habilidades y actitudes han tomado relevancia (Cox, 2011). En este sentido, Mineduc señala que entre sus principales innovaciones se reemplazó la forma de prescribir el currículo en objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios, y se definieron objetivos de aprendizaje, pues estos “relacionan en forma más explícita las habilidades, los conocimientos y las actitudes y evidencian en forma clara y precisa cuál es el aprendizaje que el estudiante

debe lograr” (Mineduc, 2012, p. 12). De esta manera, se evolucionó desde la especificación general de los logros que se esperaban por parte de los estudiantes —detallados en una lista de temas y contenidos que debían ser abordados obligatoriamente—, hacia capacidades para realizar tareas y solucionar problemas con precisión y adaptabilidad, utilizando conocimiento matemático.

En cuanto a la estructuración del conocimiento matemático en sí, podemos observar modificaciones entre los últimos dos marcos curriculares. En efecto, en el currículo oficial planteado por Mineduc en 2002, “los objetivos y contenidos planteados se presentan agrupados en torno a cuatro ejes temáticos: números, operaciones aritméticas, formas y espacio, y resolución de problemas” (Mineduc, 2002, p. 82). En cambio, en las actuales bases curriculares, se presentan los conceptos matemáticos agrupados en los ejes temáticos de: números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición, y datos y probabilidades (Mineduc, 2012). Esto evidencia dos diferencias importantes: la primera es que la resolución de problemas deja de ser un eje temático para convertirse en una habilidad transversal del desarrollo del pensamiento matemático; en tanto que la segunda se refiere a la existencia un eje propio para los conceptos relacionados con patrones y álgebra, y datos y probabilidades, tópicos que serán fundamentales posteriormente en la educación media.

Por otra parte la actividad matemática, además de involucrar conocimientos, también contempla habilidades. De hecho, evaluaciones internacionales como PISA y TIMSS se centran en medir ambos aspectos. En particular, los niveles de habilidades medidos por TIMSS (Grønmo, Lindquist, Arora & Mullis, 2013) parecieran ser más consistentes con instrumentos que buscan determinar cuánto sabe una persona según un currículo prescrito, más que en determinar cuán capaz es de realizar determinados procesos que involucran matemáticas, como ocurre en el marco competencial utilizado en PISA (Organisation for Economic Co-operation and Development, OCDE, 2016). Así, en este trabajo hemos considerado los dominios de habilidad desarrollados por TIMSS (International Association for the Evaluation of Educational Achievement, IEA, 2013): Conocer, Aplicar y Razonar. El primer dominio aborda los hechos, conceptos y procedimientos que los estudiantes necesitan saber, mientras que el segundo se centra en la capacidad de los alumnos para aplicar dicho conocimiento en la resolución de problemas. El tercer dominio va más allá de la resolución de problemas rutinarios y abarca situaciones desconocidas, contextos complejos y problemas de varias etapas.

Estas dos perspectivas para caracterizar el conocimiento matemático escolar de quienes inician su formación profesional como docentes, en conjunto y combinadas, permiten estructurar un instrumento que recoge simultáneamente los conocimientos matemáticos y las capacidades de los estudiantes. Al mismo tiempo, y dada la necesidad de orientar la política pública, la organización curricular en ejes temáticos y niveles de habilidad permite informar tanto al sistema escolar como a la gran mayoría de los programas de formación de profesores, con lo cual resultados del estudio pueden ser usados de forma más efectiva.

Creencias

Entendemos que las creencias no son solo una verbalización de lo que se cree, si no la disposición a actuar de una determinada manera (Wilson & Cooney, 2002). Consideramos también que las creencias no operan en forma aislada: en la literatura, el sistema de creencias es usado como una metáfora para representar una estructura posible de las creencias del individuo, esto es, entendimientos y premisas acerca del mundo, percibidas como verdaderas por quien las sostiene, que implican códigos personales, cognitivos y afectivos, y que disponen a las personas hacia ciertas formas de actuación (Lebrija, Flores y Trejos, 2010; Lester, Garofalo & Kroll, 1989).

Para el desarrollo de este estudio, ha sido de particular relevancia considerar cierta clasificación que permita organizar las creencias y orientar la toma de decisiones respecto de cuáles ítems compondrían el instrumento y, en segundo lugar, atender a ciertas perspectivas respecto de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, las que permitan dar cierta direccionalidad a los ítems de creencias planteados.

Al respecto, la investigación en educación matemática ha definido tres categorías en el sistema de creencias, las que permiten describir distintos aspectos de la actividad matemática que se desarrolla en el aula (Op't Eynde, De Corte & Verschaffel, 2002): creencias sobre educación matemática, creencias respecto de sí mismo y creencias sobre el contexto social. A partir de este trabajo —y considerando otros estudios relativos a creencias de profesores en ejercicio y a profesores en formación—, hemos utilizado la siguiente categorización:

- Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas. Aquellas creencias que corresponden a características inherentes a las matemáticas como disciplina.
- Creencias sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Donoso, Rico y Castro, 2016). Abarca las metodologías de enseñanza, las características de estudiantes y profesores, el contexto social y la dinámica social del aula, entre otras.
- Creencias sobre sí mismo. Incluye las actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes y cómo estas influyen en el proceso de aprendizaje (Palacios, Arias y Arias, 2014).

Las experiencias y conocimientos que un individuo tenga a lo largo de su vida en torno a la matemática definen su sistema de creencias respecto de ella, así como su enseñanza y aprendizaje, dándole cierta “perspectiva” al respecto. Felbrich, Kaiser & Schmotz (2012) distinguen dos perspectivas: aquellas constructivistas y las de transmisión, enmarcándose en visiones dinámicas y estáticas de las matemáticas, respectivamente (Kaiser & Maaß, 2007; Köller, Baumert & Neubrand, 2000). En la perspectiva de transmisión, se establece que el conocimiento se debe enseñar de forma directa, centrado en definiciones, teoremas y algoritmos que los estudiantes deberán usar. La estructura de la clase es rígida y focalizada en el profesor, siendo el estudiante un receptor del contenido, y el éxito en el aprendizaje de las matemáticas depende de las características del estudiante, es decir, capacidades o habilidades intrínsecas para aprender (Köller et al., 2000; Staub & Stern, 2002). En cambio, la perspectiva constructivista comprende la clase como un proceso de interacción para el desarrollo del conocimiento, donde el estudiante y su experiencia juegan un rol preponderante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Bajo esta perspectiva, el aprendizaje de las matemáticas dependerá de las características de las actividades que se proponen, la interacción y el rol del profesor y los estudiantes (Köller et al., 2000; Staub & Stern, 2002).

Metodología

En este estudio, desde la construcción del instrumento, la validación del mismo y hasta el análisis de los resultados, trabajamos con un diseño exploratorio-descriptivo, haciendo uso de metodologías mixtas (cualitativa y cuantitativa) de análisis de datos (Creswell, 2012). Esto responde a que el proyecto de investigación que da contexto al presente artículo, en su extensión total, pretende construir un instrumento atendiendo a dos niveles de validación (contenido y constructo) desde su diseño y, posteriormente, describir algunos rasgos característicos de la población objetivo. Para ello, una fase inicial del estudio se centró en la construcción de una primera versión del instrumento, lo que demandó la puesta en juego de diversas metodologías, desde la elaboración de una entrevista en profundidad y su análisis —para validar los constructos de creencias en el contexto FID de Chile— hasta el juicio de expertos para poner a prueba los ítems elaborados para evaluar CME (Martínez et al., 2018).

En una segunda fase, trabajamos en la validación del instrumento y en la caracterización de los estudiantes de primer año de Pedagogía Básica. Es este último aspecto el que describimos en este artículo y, por esta razón, detallamos a continuación la definición de la muestra de trabajo, así como el instrumento y los análisis realizados.

Participantes

El Sistema de Desarrollo Profesional Docente (Ley 20.903) establece un puntaje promedio mínimo de 500 puntos obtenidos en la Prueba de Selección Universitaria, PSU (en las pruebas de Lenguaje y Matemáticas) para ingresar a las carreras de Pedagogía, el cual se irá incrementando con el tiempo. Esto obliga a los programas de las universidades a estar acreditados, por lo que definimos la muestra sobre la base de las universidades que cumplían con estas características (Patton, 2001). Para precisar las variables utilizadas y estratificar la muestra, consideramos la alta segregación del sistema educacional chileno completo (Valenzuela, Bellei & De Los Ríos, 2014), cuestión que se ve reflejada en la distribución de los puntajes en la PSU. En primera instancia, el sistema de creencias sobre las matemáticas, su aprendizaje y enseñanza, se genera principalmente en el periodo escolar de los sujetos (Pajares, 1992; Schmeisser et al., 2013; Thompson, 1992; Voss et al., 2013), y como los estudiantes que ingresan a carreras de Pedagogía tienen diversas trayectorias y experiencias escolares producto de la segregación, pueden tener diferentes sistemas de creencias al respecto, así como también distintos niveles de conocimiento de la matemática escolar. Por otra parte, se observa que la dependencia escolar de los estudiantes que se matriculan en Pedagogía Básica en una universidad perteneciente al Consejo de Rectores de Universidades Chilenas (CRUCH) correlaciona con la distribución del puntaje de la PSU (Valenzuela et al., 2014). De este modo, las variables seleccionadas fueron las siguientes:

- Promedio puntaje PSU (Matemáticas y Lenguaje): diferenciando por cuartiles en el rango de puntajes PSU.
- Tipo de universidad: “tradicionales” (pertenecientes al CRUCH) y “no tradicionales”.

A partir de los criterios mencionados, se definió una muestra de 400 estudiantes recién ingresados a las carreras de Pedagogía en Educación Básica en 2017, lo que representaba aproximadamente el 25% de la matrícula anual. La distribución de las variables definidas se realizó de manera proporcional, es decir, según la cantidad de seleccionados de Pedagogía por cuartil y tipo de universidad.

La Tabla 1 muestra el número de estudiantes al que tenía que aplicársele el cuestionario para lograr un $n = 400$, según el reparto proporcional. Entre paréntesis se indica el número de estudiantes que finalmente respondió al cuestionario.

Tabla 1. Promedio puntaje PSU (Matemáticas y Lenguaje) ingreso 2017

		500 - 540	541 - 553	554 - 570	Más de 571
Tipo universidad	Tradicional	62 (68)	48 (58)	110 (94)	98 (138)
	No tradicional	22 (34)	28 (24)	17 (48)	14 (47)

Nota: *Cantidades de participantes proporcionales para la muestra planeada ($n = 400$), y cantidad de participantes efectivos ($n = 511$), por cuartil y tipo de universidad*

Fuente: *Elaboración propia.*

La muestra definitiva quedó compuesta por 511 estudiantes, lo que equivale aproximadamente a un tercio de la matrícula nacional en 2017. En términos de instituciones, los estudiantes provienen de 14 universidades, seis de ellas de la Región Metropolitana y ocho de otras regiones del país. En este contexto, el 71,61% de los cuestionarios fueron contestados por estudiantes pertenecientes a universidades tradicionales (CRUCH) y un 28,39% de universidades no tradicionales.

Instrumento

El instrumento utilizado estuvo compuesto por dos apartados: Creencias respecto de la matemática, su enseñanza y aprendizaje y Conocimiento Matemático Escolar (CME). El primer apartado lo componían 47 ítems de escala Likert, donde para cada afirmación se solicitaba evaluar el grado de acuerdo asignando un valor entre 1 (*muy en desacuerdo*) y 4 (*muy de acuerdo*). Estos ítems fueron organizados como se muestra en la Tabla 2, de acuerdo con la literatura y su validación en el contexto nacional.

Tabla 2. Distribución ítems para evaluar creencias por categorías y subcategorías

Categoría	Subcategoría	Nº ítems
Enseñanza y aprendizaje	Aprendizaje	5
	Enseñanza	9
	Dinámica social de aula	1
Expectativas y logros	Condiciones para el logro	5
	Autopercepción	5
	Ansiedad/actitud	6
	Familia	3
Matemática	Naturaleza de la matemática	2
	Naturaleza del pensamiento matemático	4
	Naturaleza de la acción matemática y su relación con el mundo	4
	Naturaleza de la matemática y su relación con el estudiante	3

Fuente: *Elaboración propia.*

El segundo apartado contempló ítems para evaluar el CME que poseen los estudiantes que ingresan a Pedagogía en Educación Básica, los cuales estaban organizados según el conocimiento matemático presente en los objetivos de aprendizaje vigentes en las actuales bases curriculares (Mineduc, 2012) de educación básica, y según los dominios cognitivos definidos por TIMMS, considerando las habilidades presentes en cada uno de ellos. El total, se distribuyeron 40 ítems después del proceso de validación, tal como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Distribución final de ítems por dominio de conocimiento y habilidad

	Habilidad			Total	
	Conocer (C)	Aplicar (A)	Razonar (R)		
Conocimiento	Números y operaciones (N)	11	8	1	20
	Medición (M)	2	1	1	4
	Geometría (G)	3	4	0	7
	Álgebra (A)	0	2	2	4
	Datos y probabilidades (D)	0	4	1	5
	Total	16	19	5	40

Fuente: *Elaboración propia.*

Análisis

En una primera instancia, y ligado a la etapa previa de validación, para los ítems relativos a creencias se realizó un análisis factorial exploratorio, considerando diversos métodos para determinar una cantidad de factores que diera cuenta de una agrupación adecuada de los ítems. De esta forma, se utilizó el método de Kaiser el cual sugirió retener 13 factores, pero el gráfico de decaimiento presentó un cambio “brusco” de pendiente después del octavo factor. Por su parte, el método MAP (Minimum Average Partial) de Velicer (Velicer, 1976) sugirió utilizar siete factores. De esta manera, procedimos a realizar nuevamente un análisis factorial, esta vez con 12 y ocho factores. En el primer caso, de los 12 factores los últimos cuatro presentaron baja consistencia y confiabilidad. A su vez, en el análisis de ocho factores, en el que se lograba explicar el 79,68% de la varianza, de uno de los factores se desprendió uno nuevo, asociado al rol de la familia, obteniendo finalmente nueve factores que explicaron el 82,80% de varianza. Posteriormente, a partir de estos factores, el método Bartlett determinó que las correlaciones entre ellos eran bajas, con un máximo de 0,319, por lo que se optó por caracterizar las creencias usando técnicas de clusterización que nos permitieran caracterizar a los estudiantes, lo que será detallado en el siguiente apartado.

En el caso del CME, y como parte de la validación del instrumento, se realizó un análisis factorial exploratorio (AFE) donde se usó la matriz de correlaciones policóricas, y el criterio de Kaiser sugirió 16 factores. Considerando la sobreestimación de este método, tomamos en cuenta el gráfico de decaimiento y el método MAP, lo cual sugirió seis factores que lograban explicar un 67,06% de la varianza. La escala completa tuvo una consistencia interna que varió entre 0,8 como subestimación y 0,88 como sobreestimación de la confiabilidad, con un alfa de Cronbach de 0,82. Cumplidos los supuestos de unidimensionalidad e independencia local por los análisis factoriales anteriores, se aplicó la teoría de respuesta al ítem (TRI) con un modelo 2PL a los 40 ítems distribuidos en los seis factores, determinando los parámetros de dificultad, discriminación y habilidad latente de los estudiantes de Pedagogía que rindieron el cuestionario. Solo siete de los 40 ítems evidenciaron una discriminación inferior a 1, lo que plantea que los ítems tienen discriminaciones moderadas a muy altas. Finalmente, realizamos un análisis descriptivo considerando los ejes de contenido y las habilidades, con el fin de describir el desempeño de los estudiantes considerando ambas variables.

Finalmente, y con el fin de relacionar las creencias y los CME, se analizó la correlación entre las clases latentes relativas a creencias y los factores relativos a CME obtenidos en las fases de validación, cuyo resultado se expone más adelante.

Caracterización de creencias y CME

A partir de la aplicación del instrumento y su posterior validación de constructo en ambos apartados del estudio (creencias y CME), a continuación se presenta la caracterización de los resultados de los estudiantes en cada ámbito, a la vez que las relaciones entre ellos.

La caracterización de las creencias reportadas por los estudiantes permitió distribuir la muestra en cuatro grupos, al realizar un proceso de clusterización sobre la base de los nueve factores obtenidos. En el Gráfico 1 se presentan los centroides de cada grupo por factor, en el cual se puede observar que los estudiantes tienen una base de creencias común.

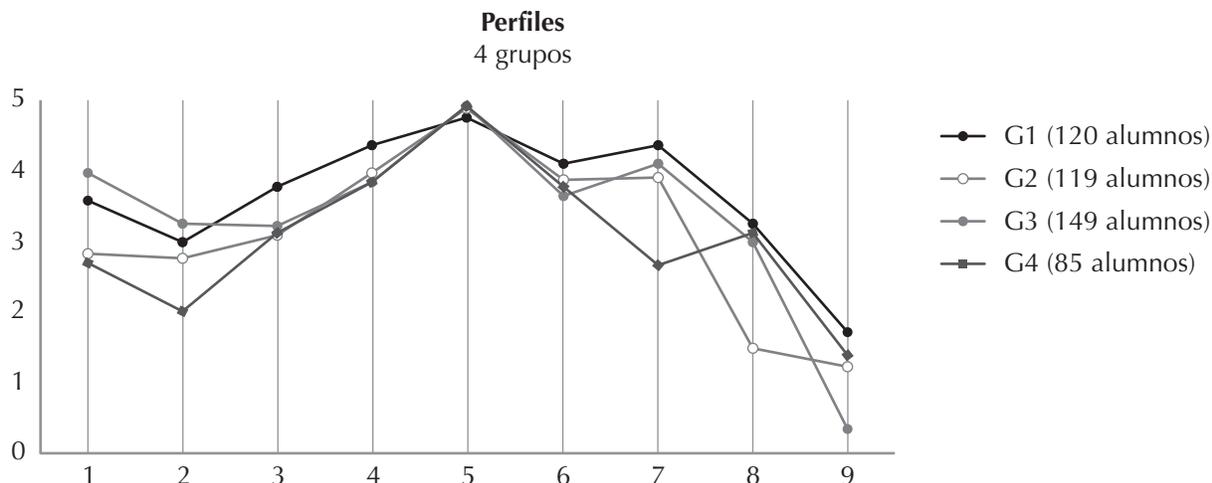


Gráfico 1. Centroides de los grupos 1 a 4, por factor de ítems escala Likert.

Fuente: Elaboración propia.

Como se indicó previamente, los grupos de estudiantes no son factibles de “ordenar” en términos de las perspectivas de la matemática y su enseñanza-aprendizaje (Felbrich et al., 2012; Kaiser & Maaß, 2007; Köller et al., 2000), ya que los participantes se caracterizan por contar con una diversidad de creencias heterogéneas, sin que todas las categorías y subcategorías que hemos definido se compartan de igual forma. Sin embargo, dichos grupos son diferenciables y se pueden identificar claramente aquellos elementos que los caracterizan y distinguen de los otros:

- Grupo 1: los integrantes tienen una actitud frente a la matemática más positiva que el resto y consideran que la disciplina es creativa. Del mismo modo, visualizan que los buenos profesores son creativos y desafiantes, y creen que la discusión con otros es importante para el aprendizaje.
- Grupo 2: son participantes moderados al considerar la matemática como una disciplina rígida. Sienten un menor apoyo por parte de su familia que los otros grupos, en lo relativo al aprendizaje de la matemática.
- Grupo 3: se trata de los participantes que tienen una mejor percepción de sí mismos en relación con el aprendizaje. Para ellos, un buen profesor propone actividades simples y claras, no teniendo que ser creativo ni entretenido.
- Grupo 4: son estudiantes que tienden estar de acuerdo con afirmaciones tradicionales sobre la matemática y no consideran que esta se pueda aprender en contexto dialógico y argumentativo.

Ahora bien, dado que cada uno de estos grupos está compuesto por estudiantes con diferente rendimiento PSU —lo cual se explica fuertemente por los aspectos de segregación de la educación en Chile (Valenzuela et al., 2014)—, interesa comprender cómo se distribuyen los alumnos según esta variable. En primer lugar, de acuerdo con su distribución según cuartil de puntaje PSU, observamos una relación significativa¹, lo que implica que el sistema de creencias sobre la matemática y la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes que ingresan a estudiar Pedagogía en Educación Básica están fuertemente asociados con su rendimiento y, por tanto, con las oportunidades de aprendizaje que tuvieron en su periodo escolar.

1. Los test estadísticos arrojaron los siguientes parámetros: ($\chi^2(9, N = 473) = 52.331, p < 0,001$).

En segundo lugar, también apreciamos (Tabla 4) que las universidades con mayor puntaje de ingreso tienen un mayor porcentaje de alumnos del grupo 4 en su composición, mientras que en el resto de las universidades, dicho grupo es el que aparece con menor porcentaje. Esto puede llevar a pensar que la enseñanza que produjo mayor rendimiento realiza una actividad matemática que es percibida por los estudiantes como más transmisiva. Por otra parte, que haya un mayor porcentaje de estudiantes del grupo 1 en las universidades del primer cuartil de ingreso puede significar que, a mayores necesidades de aprendizaje, mayor es el esfuerzo por presentar la matemática de maneras menos tradicionales. Finalmente, los estudiantes de rendimiento medio (cuartil 2 y 3) se distribuyen principal y similarmente entre los grupos 1 al 3, mostrando así una cierta heterogeneidad en su percepción de la matemática y su enseñanza y aprendizaje.

Tabla 4. Tabla de contingencia grupo de creencias y puntaje de acceso a la universidad

Cuartil	Grupo				Total
	1	2	3	4	
500 - 540	35	23	23	13	94
541 - 553	27	26	22	3	78
554 - 570	36	37	38	18	129
571+	22	33	66	51	172
Total	120	119	149	85	473

Fuente: Elaboración propia.

Respecto del CME mostrado por los estudiantes al responder el cuestionario, es factible caracterizar su dominio de los contenidos matemáticos por eje curricular, así como por nivel de dificultad según los dominios cognitivos asociados a cada uno de los ítems. El Gráfico 2 muestra los porcentajes de respuestas correctas para cada área del contenido matemático.

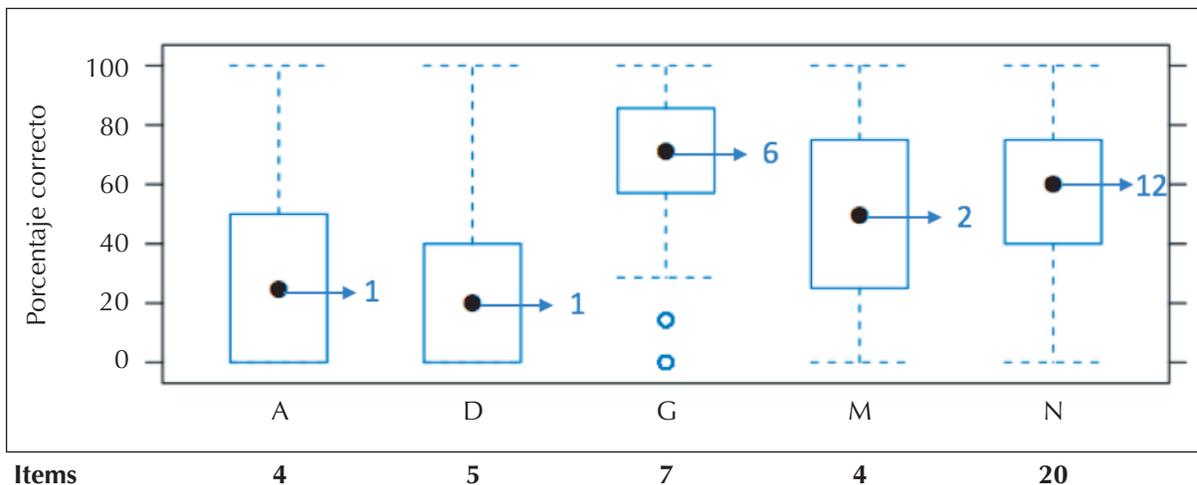


Gráfico 2. Porcentaje de respuestas correctas, en los ejes de Álgebra (A), Datos y probabilidades (D), Geometría (G), Medición (M) y Números y operaciones (N).

Nota: Los números señalados al interior del gráfico, corresponden a la cantidad de ítems respondidos correctamente por el 50% de los estudiantes (mediana), en cada eje de contenido. Los números fuera del gráfico, en la parte inferior, corresponde al total de ítems por eje.

Fuente: Elaboración propia.

Lo primero que podemos constatar de estos resultados es que hubo al menos un estudiante que respondió correctamente todos los ítems para cada eje de contenido, así como que hubo al menos un estudiante que no respondió de forma correcta ningún ítem para cada uno de estos. Lo anterior da cuenta de la amplia variabilidad de estudiantes en términos de su CME, en particular de lo señalado por las bases curriculares para el periodo de 1º a 6º año básico. Más específicamente, podemos observar que el 50% de los estudiantes respondió correctamente un 25% de los ítems de Álgebra (un ítem); un 20% de los de Datos y probabilidades (un ítem); un 71% de los de Geometría (cinco ítems); un 50% de los de Medición (dos ítems); y un 60% de los de Números y operaciones (12 ítems).

En términos de las áreas de conocimiento de mayor y menor dificultad para los estudiantes, Geometría resulta ser el eje de menor dificultad, donde el 75% de los estudiantes tiene al menos el 60% de los ítems contestados correctamente. A su vez, el eje de Números y operaciones aparece como el segundo de menor dificultad, donde la misma proporción de estudiantes tiene al menos un 40% de los ítems contestados correctamente. En el eje de Medición, por su parte, los estudiantes muestran un desempeño intermedio, ya que el 50% de ellos, responde correctamente entre el 30% y el 70% de los ítems, lo que muestra una alta dispersión de resultados. Finalmente, Álgebra y Datos y probabilidades son los ejes de mayor dificultad para los estudiantes. En el primer caso, apenas un 25% de ellos respondió correctamente el 50% de los ítems asociados, y en el segundo caso la misma proporción de estudiantes respondió el 60% de ítems de forma correcta.

Por otra parte, en el Gráfico 3 se muestran los resultados de los estudiantes según la mediana de la habilidad en los diferentes ítems.

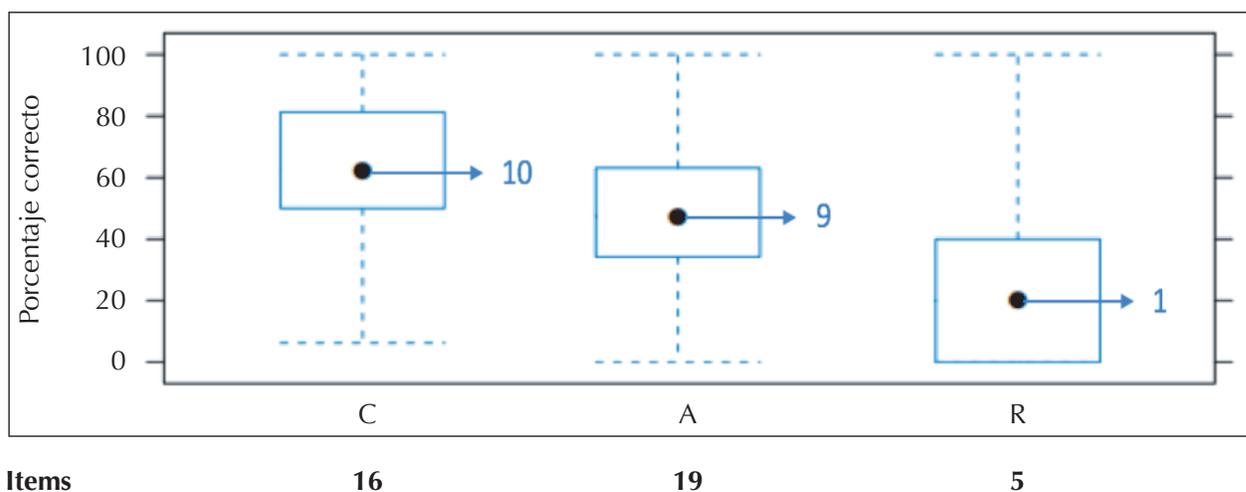


Gráfico 3. Porcentaje de respuestas correctas, por habilidades Conocer (C), Aplicar (A) y Razonar (R).
Fuente: Elaboración propia.

En estos resultados se observa que en cada una de las tres habilidades hay al menos un estudiante que responde todos los ítems correctamente, a la vez que solo en Aplicar y Razonar hay al menos un estudiante que no responde correctamente ninguno de los ítems. Al igual que en el caso de conocimiento, esto habla de la gran variabilidad en la manera en la que los estudiantes son capaces de abordar preguntas de diversa complejidad. Por otra parte, se observa un decrecimiento en el rendimiento a medida que avanza la complejidad en la habilidad, con una diferencia importante entre Aplicar y Razonar, lo cual es concordante con el orden de complejidad teórico entre las tres habilidades.

Específicamente, el 50% de los estudiantes que se encuentra por debajo de la mediana respondió correctamente cerca del 63% de los ítems (diez de 16 ítems) en el caso de la habilidad de Conocer; el 47% de los ítems (nueve de 19 ítems) en el caso de la habilidad de Aplicar; y un 20% (uno de cinco ítems) en el caso de Razonar. Además, se puede apreciar claramente que es en la habilidad de menor demanda cognitiva (Conocer) donde los estudiantes tienen mayor éxito, ya que el 75% de ellos respondió al menos la mitad de los ítems de forma correcta (ocho de los 16 ítems). Esta misma proporción de estudiantes respondió solo siete de los 19 ítems (37%) asociados a la habilidad de Aplicar; y en el caso de Razonar, solo el 25% respondió tres de los cinco ítems. Este desempeño demuestra que pese a la diferencia en la cantidad de ítems, a los estudiantes les resulta complejo responder adecuadamente ítems de mayor demanda cognitiva.

En definitiva, los resultados muestran que los estudiantes tienen un sistema de creencias característico y diferenciable, con una base común, y fuertemente relacionada con su rendimiento en la PSU. Además, el conocimiento matemático que muestran es mayor en ejes de contenido con mayor presencia en el currículo nacional, como lo es Números y operaciones y Geometría. Del mismo modo, muestran menos dominio disciplinar de contenidos correspondientes a educación básica en temas de reciente incorporación curricular, como lo es Álgebra y Datos y probabilidades. Finalmente, los estudiantes tienen cada vez menor éxito a medida que aumenta la complejidad de las demandas matemáticas incluidas en las diferentes cuestiones que se miden en el instrumento.

Relaciones entre creencias y CME

Dadas las caracterizaciones independientes de creencias y CME que mostraron los estudiantes, resulta interesante explorar algunas posibles relaciones entre estas dimensiones. Para ello, y a partir de la validación del instrumento, en primer lugar llevamos a cabo análisis factoriales y de clases latentes para el CME y las creencias, respectivamente. A partir de este análisis, obtuvimos nueve factores que agrupaban las respuestas de creencias y seis factores que agrupaban las respuestas de CME, ambos listados a continuación.

Factores de creencias	Factores de CME
C1: Soy talentoso en matemática, creo en mí mismo.	CME1: Compuesto por 12 ítems del eje de Números y operaciones y habilidad Conocer, más un ítem del eje Geometría.
C2: La matemática no es rígida, ni solo fórmulas ni memoria.	CME2: Compuesto por siete ítems del eje Números y operaciones, de los cuales cinco corresponden a la habilidad de Aplicar y dos a Conocer, más un ítem del eje de Medida.
C3: La matemática es importante para mí.	CME3: Compuesto por ocho ítems, cuatro del eje de Álgebra, correspondientes a Aplicar y Razonar, tres ítems del eje de Medida relativos a Conocer y Razonar, más un ítem de Números relativo a Razonar.
C4: La matemática presenta soluciones abiertas y creativas.	CME4: Compuesto por siete ítems, principalmente de Geometría relativos a Conocer y Aplicar, más un ítem de Medición.
C5: El profesor debe tener interés en que los alumnos aprendan.	CME5: Compuesto por seis ítems, cinco del eje de Datos y probabilidades relativos a Aplicar y Razonar, más un ítem de Álgebra.
C6: Hay personas con facilidad innata para las matemáticas.	CME6: Compuesto por cuatro ítems de Números relativos a Conocer y Aplicar.
C7: La discusión con otros es una estrategia para el aprendizaje.	
C8: El apoyo familiar es muy importante.	
C9: Un buen profesor debe ser creativo y entretenido, no simple.	

Posteriormente, y para analizar las relaciones entre estos factores, se estudiaron las correlaciones entre las variables latentes de ambas dimensiones. En la Tabla 5 se muestran las correlaciones de Pearson entre las nueve variables latentes asociadas a las creencias (C1 a C9) y las seis variables latentes asociadas al contenido (CME1 a CME6).

Tabla 5. Correlaciones de Pearson entre variables latentes

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
CME ₁	0,36**	0,03	0,08	-0,13*	0,07	0,12*	-0,04	0,09	-0,07
CME ₂	0,19**	0,09	-0,02	-0,14**	0,07	0,13*	0,03	0,07	-0,02
CME ₃	0,09	0,05	0,02	-0,12*	0,03	0,02	-0,03	0,03	-0,02
CME ₄	0,23**	0,11*	0,03	-0,08	0,10	0,12*	-0,07	0,09	0,02
CME ₅	0,19*	0,09	0,06	-0,03	-0,02	-0,13*	-0,02	0,02	-0,10
CME ₆	0,30**	0,12*	-0,01	-0,11*	0,02	0,10	-0,08	0,11*	-0,13*

Nota: Las correlaciones con * y ** son medianas y altas, respectivamente.

Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que solo tres de las nueve variables latentes de creencias tienen la mayoría de correlaciones con los factores de CME. En particular, C1 está alta o medianamente correlacionada con cinco de las seis variables latentes de CME. Por su parte, C4 muestra una correlación media o alta, y de carácter inverso, con cuatro de las seis variables latentes de CME. Finalmente, la variable C6 correlaciona medianamente con cuatro de las seis variables latentes de contenido. A partir de este escenario, se realizó un proceso de análisis de conglomerados de los estudiantes de acuerdo con las variables latentes C1, C4 y C6, que por medio del método de Ward, arrojó seis grupos diferenciados. En el Gráfico 4 se analizan los promedios de las variables latentes de creencias y en el Gráfico 5 las de CME, para cada uno de los seis grupos.

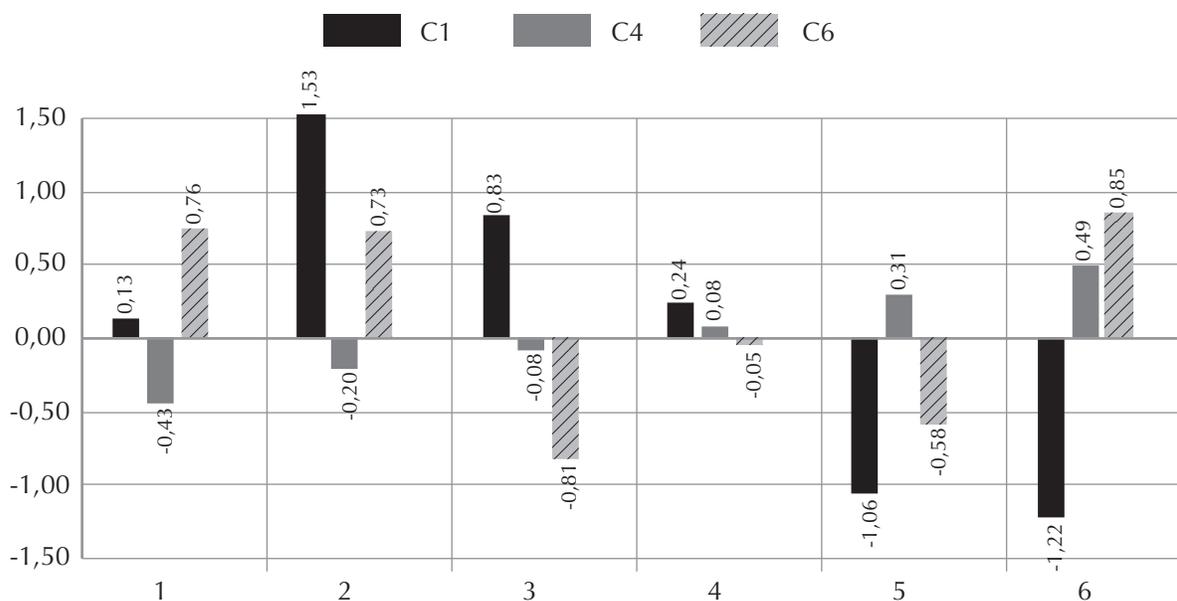


Gráfico 4. Promedios de variables latentes de creencias según grupo.

Fuente: Elaboración propia.

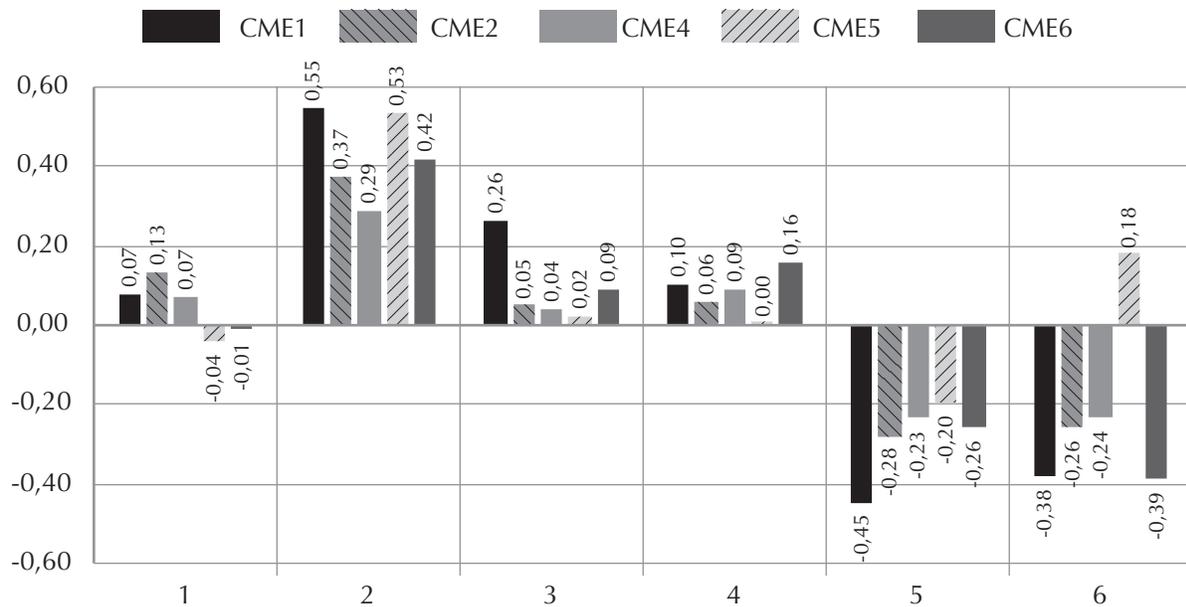


Gráfico 5. Promedios de variables latentes de contenido según grupo 2.

Fuente: Elaboración propia.

A partir de análisis de los gráficos nos gustaría destacar algunos elementos llamativos para indagar en ciertas posibles relaciones entre las creencias de los estudiantes y su CME. Por ejemplo, podemos observar que hay grupos que se “abren”, tanto según los promedios de variables latentes referidas a creencias como a CME, como por ejemplo los grupos 2 y 5. De la misma manera se observa que los grupos 5 y 6 comparten una muy baja autopercepción del talento matemático (C1) y una percepción alta de la flexibilidad matemática (C4), pero se diferencian en la percepción del talento innato (C6), siendo similares en su comportamiento en las variables relativas a CME, salvo por el factor centrado en Datos y probabilidades (CME5).

En términos de las variables de creencias (Gráfico 4), el grupo 1 cree en una matemática rígida, que requiere de un talento innato y sus integrantes son indiferentes a su propio talento. En cambio, el grupo 2 tiene muy alta percepción propia acerca de su talento matemático, cree que estas son algo rígidas y sus miembros creen que existe la facilidad innata. El tercer grupo tiene una alta percepción de su talento matemático, pero los participantes no creen que el talento sea innato, sino que podría aprenderse y trabajarse. El cuarto grupo parece ser indiferente a todo. Los integrantes del grupo 5 tendrían una muy baja percepción de su propio talento matemático, considerando la matemática de forma creativa, pero no innata. Finalmente, el grupo 6 estaría compuesto por estudiantes que no creen tener talento matemático o facilidades, y creen en una matemática creativa e innata.

Por otro lado, según las variables latentes de CME (Gráfico 5), es interesante notar que en el grupo 6, el factor CME5 sobresale con un valor medianamente alto, el segundo mayor después del valor promedio del grupo 2, el cual a su vez presenta el segundo menor valor de este factor. Se debe destacar que el grupo 6 estaba caracterizado por creer en una matemática creativa (C4), y el grupo 1 por creer en una matemática poco creativa, ambos con una creencia similar en la capacidad innata para las matemáticas. Dado que el factor CME5 se vincula con los ítems de Datos y Azar, puede verse una relación entre la creencia de creatividad en matemática y la resolución de problemas de este eje (considerados difíciles), aunque no es visible en los valores estadísticos de correlación.

2. Se omite CME3 del análisis por correlacionar solo con dos de las tres variables latentes de creencias seleccionadas (ver Tabla 5).

En términos generales, es interesante observar que los grupos 5 y 6 en cuanto a creencias se caracterizan por tener una baja percepción de sí mismos (a diferencia de los grupos 1, 2, 3 y 4) y son quienes tienen peores promedios en las variables latentes relativas a CME (excepto la variable CME_5 en el grupo 6), siendo además los grupos donde se da mayor valor a la creatividad. Estos elementos son puntos iniciales para indagar de manera más profunda en las relaciones entre el conocimiento y el sistemas de creencias de un profesor en formación.

Conclusiones

La obligatoriedad que tienen las universidades que forman profesores de considerar una evaluación inicial diagnóstica al comienzo de las carreras de Pedagogía, según las exigencias que establece el nuevo Sistema de Desarrollo Profesional Docente (Ley 20.903), ha de llevar a las instituciones a levantar información relevante y válida que permita tomar decisiones para cada una de las cohortes que ingresan, en función de adecuar y diseñar trayectorias que permitan alcanzar las metas descritas en los perfiles de egreso de sus carreras. En este sentido, los resultados presentados aquí representan una oportunidad para las facultades de educación que forman profesores de Educación Básica para repensar las oportunidades de aprendizaje matemático prescritas en las trayectorias curriculares, sobre la base de la caracterización del CME de 1º a 6º año básico y las creencias respecto de enseñar y aprender matemática. En este marco, subrayamos la importancia de desarrollar evaluaciones que nos permitan conocer a los estudiantes en ámbitos diferentes de los que nos entregan las mediciones conocidas, de ahí la definición de CME, como aspecto distinto del evaluado por las pruebas de selección universitaria, y que constituye la base para el desarrollo del conocimiento matemático especializado que deben desarrollar los profesores en formación.

Del mismo modo, el estudio de creencias nos entrega información muy relevante en el contexto de la FID, particularmente para conocer a los estudiantes que comienzan su formación docente. Tal como precisamos al comienzo, las creencias constituyen una disposición a actuar (Lebrija et al., 2010; Lester et al., 1989; Wilson & Cooney, 2002) y su construcción a lo largo de la vida puede determinar una perspectiva del individuo respecto de la matemática, su enseñanza y aprendizaje. Del análisis de las creencias de los estudiantes de Pedagogía Básica al comienzo de su formación docente, podemos destacar que los métodos de análisis de conglomerados utilizados permitieron caracterizar las creencias de estos alumnos de la muestra en relación con la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza. Se identificaron cuatro grupos, con un comportamiento grueso común en algunos factores y diferencias en otros casos, las cuales son precisamente las que permiten caracterizar cada uno de dichos grupos. Ahora bien, un elemento llamativo acerca de los resultados es el hecho de que las agrupaciones se distribuyen de forma claramente distinta según los cuartiles de puntaje de ingreso a la universidad. Esto es una evidencia de que las creencias de los estudiantes al comenzar su formación son heterogéneas y que existen diferencias entre universidades que sí pueden ser caracterizadas, de modo que vale la pena que las instituciones de educación superior del país destinen esfuerzos para conocer dichas creencias, para así proporcionar una formación que responda a las condiciones de origen de su estudiantado.

Respecto del CME de los estudiantes de primer año de Pedagogía en Educación Básica, los resultados muestran un logro que es concordante con el peso curricular que tienen o han tenido cada uno de los ejes de contenido en este ciclo educativo: los temas con menor porcentaje de respuestas correctas son Álgebra y Datos y probabilidades, a diferencia de Geometría y Números y operaciones. Al respecto, resulta relevante considerar que los estudiantes que respondieron el cuestionario no tuvieron oportunidades de aprendizaje respecto de las habilidades y contenidos que están definidos en los ejes de menor logro en su formación de enseñanza básica, ya que estos temas solo fueron incorporados a partir del marco curricular vigente el año 2012. Lo anterior no ocurre con Geometría y Números y operaciones pues, ya sea en el marco curricular vigente o en el anterior, prevalece un porcentaje importante de conocimiento relacionado con números, operatoria y geometría. En cuanto a las habilidades, se

observa claramente que los razonamientos matemáticos que usan y aplican información matemática son los más complejos para los estudiantes, independientemente del eje temático. Del mismo modo, a medida que la habilidad requiere de menos aspectos cognitivos complejos, mejor es el rendimiento. Ambos resultados sugieren que las actividades de aprendizaje que se realizan en los cursos disciplinares y didácticos deberían abordar de forma especial aquellos temas de menor presencia en el currículo escolar y de una demanda cognitiva mayor, donde los estudiantes puedan articular información matemática para la toma de decisiones, la formulación de conjeturas y la resolución de problemas.

Al analizar las relaciones iniciales entre las variables latentes de creencias y los factores del apartado de CME, una correspondencia que nos llama particularmente la atención es que aquellos estudiantes que tienen mejor rendimiento en el eje de Números y operaciones, tienen mejor autopercepción respecto de su capacidad en matemática y otorgan menor valor a la creatividad. Dada la amplia visión de que la matemática es exacta, requiere rapidez mental y se relaciona con el trabajo numérico (en desmedro del trabajo espacial o estocástico) pensamos que puede ser natural la relación entre buen rendimiento en el eje de Números y la consideración de que dicha capacidad define “el ser bueno en matemática”. Esto nos lleva a reflexionar en torno a cómo se define la actividad matemática en las aulas escolares y cómo se relaciona dicha percepción con la FID, por lo que será necesario durante ese periodo de formación ofrecer múltiples oportunidades de ampliar la concepción de la matemática y de lo que significa ser matemáticamente competente.

Finalmente, sobre la base del estudio realizado nos parece relevante subrayar la importancia del trabajo que se está desarrollando en torno a las evaluaciones diagnósticas en Chile. En primera instancia, creemos necesario que la política pública incentive investigaciones que apunten a crear instrumentos complementarios entre sí, que permitan medir un conocimiento profundo y específico de la labor de enseñar y que esto ocurra al inicio de la carrera profesional. Para ello, será necesario generar estrategias multimétodo, es decir, que contemplen diferentes formas, pero que sean articuladas para extraer diversos tipos de información, por ejemplo: cuestionarios para percepciones y conocimiento, entrevistas para evaluación de toma de decisiones, simulaciones de desempeño y observación de aula, entre otras. En segundo lugar, es preciso subrayar que un proceso tan costoso y complejo como el desarrollo de evaluaciones de esta categoría, pone de manifiesto la necesidad de que las universidades trabajen de manera conjunta y colaborativamente para optimizar el quehacer involucrado, compartir aprendizajes y realizar esfuerzos a nivel país, que permitan las mejoras en educación que trazamos como objetivo común.

El artículo original fue recibido 30 de enero de 2019
El artículo revisado fue recibido el 23 de agosto de 2019
El artículo fue aceptado el 17 de septiembre de 2019

Referencias

- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal for Teaching Education*, 39(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.
- Boyd, D., Grossman, P., Lankford, H., Loeb, S., & Wyckoff, J. (2009). Teacher preparation and student achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 31(4), 416-440. <https://doi.org/10.3102/0162373709353129>

- Carrillo, J., Contreras, L., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, e I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 192-200). Granada: Comares.
- Cox, C. (2011). Currículo escolar de Chile: génesis, implementación y desarrollo. *Revue Internationale de Éducation de Sèvres*, 56, 1-9. <https://doi.org/10.4000/ries.1047>
- Creswell, J. (2012). *Educational research: Planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research* (4th edition). Boston: Pearson.
- Donoso, P., Rico, N., y Castro, E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 20(2), 76-97. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56746946005>
- Felbrich, A., Kaiser, G., & Schmotz, C. (2012). The cultural dimension of beliefs: An investigation of future primary teachers' epistemological beliefs concerning the nature of mathematics in 15 countries. *ZDM*, 44(3), 355-366. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0418-x>
- Font, V., Breda, A., Giacomone, B., y Godino, J. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. Rodríguez-Muñoz, L. Muñoz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 23-38). Gijón: SEIEM.
- Freeman, D. (1989). Teacher training, development, and decision making: A model of teaching and related strategies for language teacher education. *TESOL Quarterly*, 23(1), 27-46. <https://doi.org/10.2307/13587506>
- Grønmo, L., Lindquist, M., Arora, A., & Mullis, I. (2013). TIMSS 2015 Mathematics Framework. En I. Mullis & M. Martins (Eds.), *TIMSS 2015 Assessment Frameworks* (pp. 11-27). Boston: TIMSS y PIRLS International Study Center.
- Hannula, M. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137-161. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281>
- Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula-towards a framework of developmental proof. *Journal of Curriculum Studies*, 45(3), 354-378. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.754055>
- International Association for the Evaluation of Educational Achievement, IEA. (2013). *TIMSS 2015 Assessment Framework*. Boston: Autor.
- Kaiser, G. & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom-problems and opportunities. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 99-108). New York: Springer US.
- Kerr, D. (2002). An international review of citizenship in the curriculum: The tea national case studies and the Inca archive. En G. Steiner-Khamsi, J. Torney-Purta, & J. Schulle (Eds.), *New paradigms and recurring paradoxes in education for citizenship: An international comparison* (pp. 207-237). Bingley: Emerald Group Publishing Limited. Recuperado de [https://www.emeraldinsight.com/doi/book/10.1016/S1479-3679\(2002\)5](https://www.emeraldinsight.com/doi/book/10.1016/S1479-3679(2002)5)
- Köller, O., Baumert, J., & Neubrand, J. (2000). Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht. En J. Baumert, W. Bos, & R. Lehmann (Eds.), *Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe* (pp. 229-269). Opladen: Leske + Budrich.
- Lebrija, A., Flores, R., y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemática en Panamá. *Educación Matemática*, 22(1), 31-55.
- Lester, F., Garofalo, J., & Kroll, D. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem solving behavior. En D. McLeod & V. Adams (Eds.), *Affects and mathematical problem solving* (pp. 75-88). New York: Springer-Verlang.
- Ley N°20903. Crea el sistema de desarrollo profesional docente y modifica otras normas. *Diario Oficial de la República de Chile*, Santiago, Chile, 4 marzo 2016.
- Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU.* Santiago de Chile: Academia Chilena de Ciencias.

- Martínez, M., Rojas, F., Chandía, E., Ortiz, A., Perdomo-Díaz, J., Reyes, C., y Ulloa, R. (2018). *Diagnóstico de las creencias y conocimientos iniciales de estudiantes de Pedagogía Básica sobre la matemática escolar, su aprendizaje y enseñanza. Informe Fonide*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile.
- Ministerio de Educación de Chile, Mineduc. (2002). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica, actualización 2002*. Santiago de Chile: Autor.
- Ministerio de Educación de Chile, Mineduc. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica, actualización 2009*. Santiago de Chile: Autor.
- Ministerio de Educación de Chile, Mineduc. (2012). *Bases curriculares*. Santiago de Chile: Autor.
- Mourshed, M., Chijioke, Ch., & Barber, M. (2010). *How the world's most improved school systems keep getting better*. Recuperado de <https://www.mckinsey.com/industries/social-sector/our-insights/how-the-worlds-most-improved-school-systems-keep-getting-better>
- Musset, P. (2010). Initial teacher education and continuing training policies in a comparative perspective: Current practices in OECD countries and a literature review on potential effects. *OECD Education Working Papers, No. 48*. <https://doi.org/10.1787/5kmbphh7s47h-en>
- Nisbett, R. & Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgment*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, Reading, mathematics and financial literacy*. Paris: Autor. <https://doi.org/10.1787/9789264255425-en>
- Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs: a quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. En G. Leder, E. Pehkonen, & G. Torner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp.13-37). Dordrecht: Kluwer.
- Ortúzar, M., Flores, C., Milesi, C., y Cox, C. (2009). Aspectos de la formación inicial docente y su influencia en el rendimiento académico de los alumnos. En Dirección de Asuntos Públicos PUC (Ed.), *Camino al Bicentenario. Propuestas para Chile* (pp. 155-186). Santiago de Chile: Pontificia Universidad Católica de Chile.
- Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research, 62*(3), 307-332. <https://doi.org/10.2307/1170741>
- Palacios, A., Arias, V., y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica, 19*(1), 67-91. <https://doi.org/10.1387/revpsicodidact.8961>
- Patton, M. (2001). *Qualitative evaluation and research methods* (3rd ed.). Newbury Park: Sage Publications.
- Philipp, R. (2007). Mathematics teachers. Beliefs and Affect. En F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte: Information Age Publishing.
- Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. En J. Sikula (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 102-119). New York: Macmillan Publishing.
- Schmeisser, C., Krauss, S., Bruckmaier, G., Ufer, S., & Blum, W. (2013). Transmissive and constructivist beliefs of in-service mathematics teachers and of beginning university. En Y. Li & J. Moschkovich (Eds.), *Proficiency and beliefs in learning and teaching mathematics: Learning from Alan Schoenfeld and Günter Törner. Mathematics teaching and learning* (pp. 51-67). Rotterdam: Sense Publ.
- Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reforms. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79f56455411>
- Staub, F. & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), 344-355. <https://doi.org/10.1037/10022-0663.94.2.344>
- Thompson, A. (1992). *Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research*. New York: Macmillan Publishing.
- Valenzuela, J., Bellei, C., & De los Ríos, D. (2014). Socioeconomic school segregation in a market-oriented educational system. The case of Chile. *Journal of Education Policy, 29*(2), 217-241. <https://doi.org/10.1080/026809379.2013.806995>

- Velicer, W. (1976). Determining the number of components from the matrix of partial correlations. *Psychometrika*, 41, 321-327. <https://doi.org/10.1007/bf02293557>
- Voss, T., Kleickmann, T., Kunter, M., & Hachfeld, A. (2013). Mathematics teachers' beliefs. En M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, & M. Neubrand (Eds.), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers* (pp. 249-271). New York: Springer US.
- Wilson, M. & Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and development. En G. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 127-147). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.